Prof. Dr. Alfred Toth

Semiotik und morphologische Mathematik

1. Die kürzlich von Aiello und Ottens (2007) knapp skizzierte Morpho-Logik oder morphologische Mathematik gründet auf zwei, der Supremums- und der Infimums-Operation der Verbandstheorie ähnlichen Operationen:

$$A \oplus B = \bigvee \{a + b | a \in A, b \in B\} \qquad \textbf{dilation} \qquad (1)$$

$$A \ominus B = \bigvee \{z \in l | A_z \leq B\} \qquad \textbf{erosion} \qquad (2)$$

Durch sukzessive Anwendung dieser Operationen kann man topologische Mengen, Regionen oder verwandte Gebilde öffnen und abschliessen. Erosion gefolgt von Dilation ergibt Öffnung (von Zusammenhängen zwischen Regionen); die umgekehrte Reihenfolge ergibt Abschliessung (zum Füllen von Löchern in bestimmten Regionen). Als zusätzlicher Operator wird ⊗, die Vektornegation, eingeführt:

- $(x, y, z) \in C$ if $x = y + z$
- $(x, y) \in R$ if $x = -y$
- $(x) \in I$ if $x = e$

2. Auf dieser Basis und bestimmten Wahrheitswertdefinitionen, die bei Aiello und Ottens (2007) nachgelesen werden können, kann eine vollstädnige morphologische Basis in folgenden 11 Axiomen ausgedrückt werden, die aus 2 assoziativen, 1 kommutativen Gesetzen, 4 Konversionsgesetzen, 2 Identitäts-gesetzen und 2 Distributivgesetzen bestehen:

(Ass1)	$(p \oplus q) \oplus r \rightarrow p \oplus (q \oplus r)$
(Ass2)	$p \oplus (q \oplus r) \rightarrow (p \oplus q) \oplus r$
(comm)	$p \oplus q \rightarrow q \oplus p$
(rev1)	$\neg \otimes (p) \rightarrow \otimes(\neg p)$
(rev2)	$\otimes(\neg p) \rightarrow \neg(\otimes p)$
(rev3)	$\otimes \otimes p \rightarrow p$
(rev4)	$i \oplus \otimes i \rightarrow e$
(id1)	$p \oplus e \rightarrow p$
(id2)	$p \rightarrow p \oplus e$
(vers1)	$\otimes(p \oplus q) \rightarrow (\otimes p) \oplus (\otimes q)$
(vers2)	$p \oplus \neg((\otimes p) \oplus q) \rightarrow \neg q$

Mit Hilfe dieser morphologischen Axiome können nun aber die 8 Operationen des Region Connections Calculus (RCC), der auf der Intervallogik basiert, vollständig erfasst werden (Aiello/Orttes 2007):

$DC(x,y)$	$U\neg(x \wedge y)$
$EC(x,y)$	$\neg U\neg(((x \oplus C) \wedge y)) \wedge U\neg(x \wedge y)$
$PO(x,y)$	$\neg U\neg(x \wedge y) \wedge \neg U(x \rightarrow y) \wedge$ $\neg U(y \rightarrow x)$
$x = y$	$U(x \leftrightarrow y)$
$TPP(x,y)$	$U(x \rightarrow y) \wedge \neg U(y \rightarrow x) \wedge$ $\neg U((x \oplus C) \rightarrow y)$
$NTPP(x,y)$	$U(x \rightarrow y) \wedge \neg U(y \rightarrow x) \wedge$ $U((x \oplus C) \rightarrow y)$
$TPP^{-1}(x,y)$	$U(y \rightarrow x) \wedge \neg U(x \rightarrow y) \wedge$ $\neg U((y \oplus C) \rightarrow x)$
$NTPP^{-1}(x,y)$	$U(y \rightarrow x) \wedge \neg U(x \rightarrow y) \wedge$ $U((y \oplus C) \rightarrow x)$

Und diese Axiome wurden ja als für die Semiotik relevant herausgestellt in Toth (2011), denn sie enthalten die 5 Grundtypen der „Nähe“ zwischen Zeichen und Objekt (∅, Tangential, Überlappung, Proper Part, Koinzidenz). Daraus folgt aber, dass auch die morphologische Mathematik für die Semiotik relevant ist, d.h. dass sich die Semiotik ebenfalls auf den zwei Axiomen der Dilation und der Erosion begründet lassen, d.h. also dass als die beiden basalen Zeichenfunktion Öffnung (Trennung) und Abschliessung (Referenzbildung) aufgefasst werden können.

Bibliographie

Aiello, Marco/Ottens, Brammert, The Mathematical Morpho-Logical view of Reasoning about Space. In: Int. Joint Conf. on Artificial Intelligence (IJCAI'07) Hyderabad, India, S. 205-211

Toth, Alfred, Zur Anwendung des Region Connection Calculus (RCC) auf die Semiotik. In: Electronic Journal for Mathematical Semiotics, 2011

10.1.2011